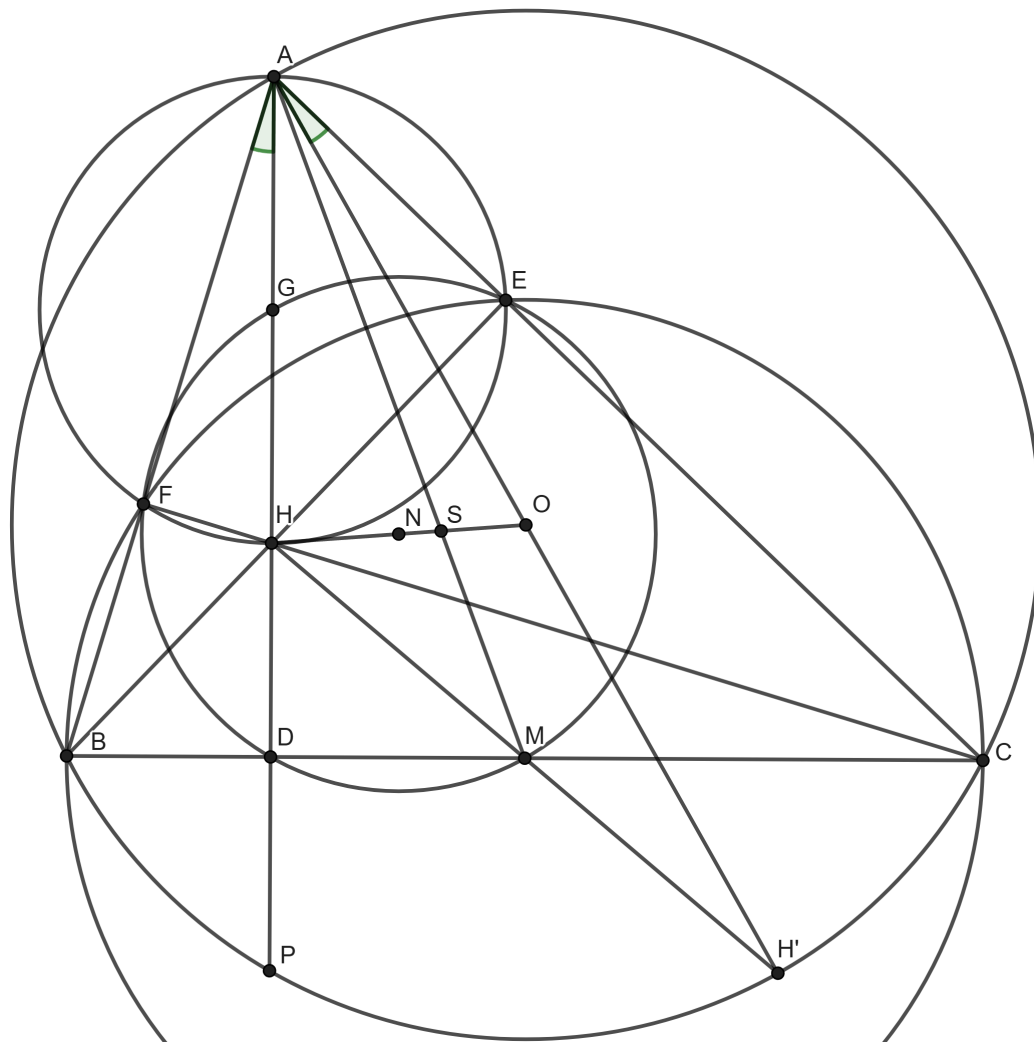


Átfogó geometriai konfigurációk

Gyenes Zoltán foglalkozása

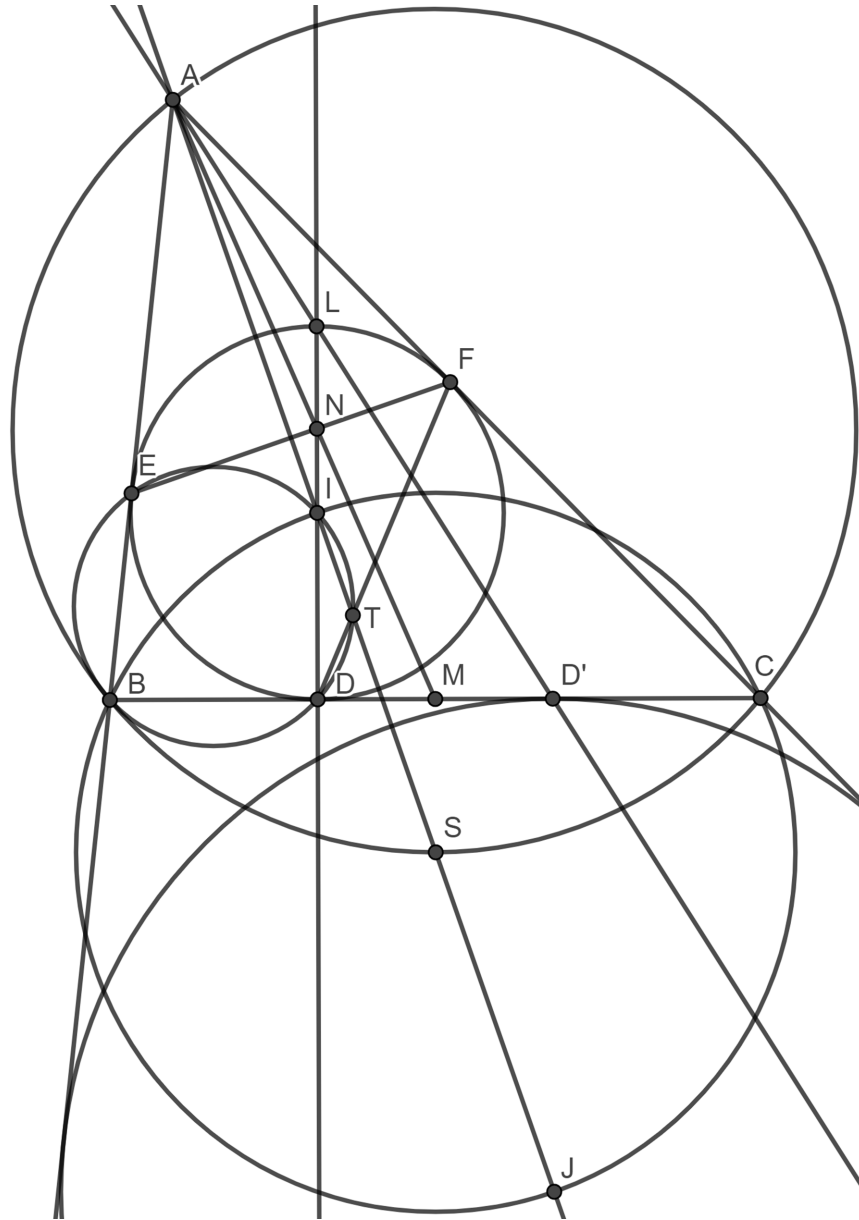
A. ábra



Az ábrán látható pontokat a következőképpen kaptuk. Az ABC hegyesszögű háromszög magasságpontja H , súlypontja S , köréírt körének középpontja O . Az A, B, C pontból induló magasságok talppontjai rendre D, E, F . Legyen a BC szakasz felezőpontja M , az AH szakasz felezőpontja G . Jelölje P és H' a H pont tükörképét rendre a D és M pontokra. Végül legyen N a DEF háromszög köréírt körének középpontja.

2025. szeptember 11.
Szakkörvezető: Gyenes Zoltán
A feladatlapot készítette: Imolay András

B. ábra



Az ábrán látható pontokat a következőképpen kaptuk. Az ABC hegyesszögű háromszög beírt körének középpontja I , a beírt kör érintési pontjai D, E, F . Legyen J az A -val szemkötti hozzáírt kör középpontja. Az M pont a BC szakasz felezőpontja, és D' a D pont tükörképe M -re. A DI egyenes az AM és AD' egyeneseket rendre az N és L pontokban metszi. Legyen S a rövidebb BC ív felezőpontja a köréírt körön. Végül legyen T az AI szögfelező és a DF egyenes metszéspontja.

2025. szeptember 11.

Szakkörvezető: Gyenes Zoltán

A feladatlapot készítette: Imolay András

Feladatok az A. ábrán

- A/1. Mutassuk meg, hogy B, F, E, C pontok egy körön vannak, melynek középpontja M .
- A/2. Mutassuk meg, hogy A, F, H, E pontok egy körön vannak, melynek középpontja G .
- A/3. Mutassuk meg, hogy $\angle BAH = \angle OAC$.
- A/4. Mutassuk meg, hogy a P és H' pontok az ABC háromszög köréírt körére esnek.
- A/5. Mutassuk meg, hogy az A, O, H' pontok egy egyenesre esnek.
- A/6. Mutassuk meg, hogy a D, M, E, G, F pontok egy körön vannak, melyek középpontja N .
- A/7. Mutassuk meg, hogy a H, N, S, O pontok egy egyenesen vannak, és $HN = NO = \frac{3}{2}SO$.
- A/8. Keressünk további érdekes összefüggéseket az ábrán (akár további pontok felvételével).

Feladatok a B. ábrán

- B/1. Mutassuk meg, hogy az A, I, T, S, J pontok egy egyenesre esnek.
- B/2. Mutassuk meg, hogy az E, F, N pontok egy egyenesre esnek.
- B/3. Mutassuk meg, hogy a C, I, B, J pontok egy körön vannak, és ennek a körnek a középpontja S .
- B/4. Mutassuk meg, hogy a D' pont a hozzáírt kör érintési pontja.
- B/5. Mutassuk meg, hogy L rajta van a beírt körön.
- B/6. Mutassuk meg, hogy a B, E, I, T, D pontok egy körre esnek.
- B/7. Mutassuk meg, hogy MT és AC párhuzamos, azaz T rajta van az ABC háromszög egyik középvonalán.
- B/8. Mutassuk meg, hogy $\angle ATB = 90^\circ$.
- B/9. Keressünk további érdekes összefüggéseket az ábrán (akár további pontok felvételével).

2025. szeptember 11.

Szakkörvezető: Gyenes Zoltán

A feladatlapot készítette: Imolay András

További feladatok

- F/1.** Legyen az ABC háromszög beírt körének középpontja I . Legyen P a háromszög belsejében egy olyan pont, melyre

$$PBA\angle + PCA\angle = PBC\angle + PCB\angle.$$

Bizonyítsuk be, hogy $AP \geq AI$, és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha P egybeesik I -vel.

- F/2.** Az ABC hegyesszögű háromszög köréírt körének középpontja O , magasságpontja H . Az AH szakasz felezőmerőlegese az AB és AC oldalakat rendre a D és E pontokban metszi. Bizonyítsuk be, hogy $DOA\angle = EOA\angle$.

- F/3.** Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, melyre $BAC\angle = 60^\circ$ és $AB > AC$. Jelölje I a háromszög beírt körének középpontját, H pedig a magasságpontját. Bizonyítsuk be, hogy $2AHI\angle = 3ABC\angle$.

- F/4.** Legyen P egy pont az ABC háromszög köréírt körén. Bizonyítsuk be, hogy ha P -t türozzük a háromszög oldalaira, akkor a kapott pontok egy olyan egyenesen vannak, amely áthalad az ABC háromszög magasságpontján.

- F/5.** Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, melyre $AB \neq AC$, H a háromszög magasságpontja, és M a BC oldal felezőpontja. Az AB oldalon vegyünk fel egy D pontot, az AC oldalon pedig egy E pontot úgy, hogy $AE = AD$ és a D, H, E pontok egy egyenesre esnek. Bizonyítsuk be, hogy HM merőleges az ABC és ADE háromszögek köréírt köreinek közös húrjára.

- F/6.** Az ABC háromszögben $AB + BC = 3AC$. A háromszög beírt körének középpontja I , és a beírt kör az AB és BC oldalakat rendre a D és E pontokban érinti. Legyen K és L rendre a D és E pontoknak az I pontra vett tükörképei. Bizonyítsuk be, hogy az $ACKL$ négyszög húrnégyszög.

- F/7.** Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, melynek a beírt köre az AC és AB oldalakat rendre az E és F pontokban érinti. Legyenek az $ABC\angle$ és $ACB\angle$ szögfelezőinek EF -fel vett metszéspontjai rendre X és Y , továbbá legyen a BC oldal felezőpontja Z . Bizonyítsuk be, hogy XYZ pontosan akkor szabályos háromszög, ha $BAC\angle = 60^\circ$.

- F/8.** Az ABC háromszög A -ból induló súlyvonala az ω beírt kört a K és L pontokban metszi. A K és L pontokon keresztül a BC -vel párhuzamos egyenesek az ω -t másodszor az X és Y pontokban metszik. Az AX és AY egyenesek a BC egyenest rendre a P és Q pontokban metszik. Bizonyítsuk be, hogy $BP = CQ$.

- F/9.** Az ABC háromszög magasságpontja H , beírt körének középpontja I , és köréírt körének középpontja O . Legyen K a beírt kör érintési pontja a BC oldalon. Bizonyítsuk be, hogy ha IO párhuzamos BC -vel, akkor AO párhuzamos HK -val.

2025. szeptember 11.

Szakkörvezető: Gyenes Zoltán

A feladatlapot készítette: Imolay András